LFA: Notas de Aula - AFNε

14 de Março de 2015

Conteúdo

1 Função Fecho Vazio ($FECHO$–ε ou $F\varepsilon$) 1

2 Função de Programa Estendida para o AFNε 4

3 Conversão de AFNε para AFN 6

4 Conversão de AFN para AFD 9

---

1 Função Fecho Vazio ($FECHO$–ε ou $F\varepsilon$)

A função F$\varepsilon(q)$ consiste em encontrar todos os estados possíveis de se alcançar através do movimento vazio ε partindo de um dado estado q.

Assim, observando o autômato da Figura 1, temos:

$$
\begin{aligned}
F\varepsilon(0) &= \{0, 1, 2, 4\} \\
F\varepsilon(1) &= \{1, 2\} \\
F\varepsilon(2) &= \{2\} \\
F\varepsilon(3) &= \{3\} \\
F\varepsilon(4) &= \{4\} \\
F\varepsilon(5) &= \{5\}
\end{aligned}
$$

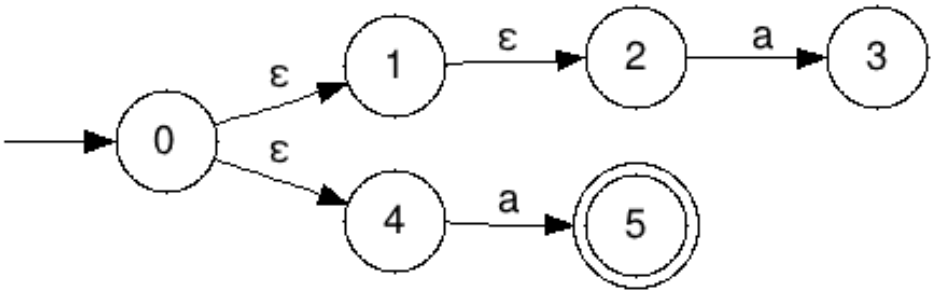


Figura 1: AFNε exemplo

A função fecho vazia é definida assim:

Definição da Função Fecho Vazio

$$FECHO\text{–}\varepsilon : Q \to 2^Q$$

onde:

1. $FECHO\text{–}\varepsilon(q) = \{q\}, \quad se \quad \delta(q, \varepsilon)$ é indefinido;
2. $FECHO\text{–}\varepsilon(q) = \{q\} \cup \delta(q, \varepsilon) \cup (\bigcup_{p \in \delta(q,\varepsilon)} FECHO\text{–}\varepsilon(p))$, caso contrário.

Quando $\delta(q, \varepsilon)$ é indefinido (não há transição com o movimento vazio a partir do estado q), o resultado da função será um conjunto contendo somente o estado q. Se houver transição com movimento vazio a partir do estado q, então deve-se resolver o item 2 da definição acima.

Por exemplo, vamos encontrar $F\varepsilon(0)$:

$$F\varepsilon(0) = \{0\} \cup \delta(0, \varepsilon) \cup \{ \bigcup_{p \in \delta(0,\varepsilon)} F\varepsilon(p)\}$$

Onde:

- Observando o autômato vemos que $\delta(0, \varepsilon) = \{1, 4\}$, ou seja, a função de transição aplicada ao estado zero com movimento vazio resulta no conjunto de estados $\{1, 4\}$. Perceba a diferença: $\delta(\{0\}, \varepsilon) = \{0, 1, 4\}$ e $\delta(0, \varepsilon) = \{1, 4\}$.
- $\bigcup_{p \in \delta(0,\varepsilon)} F\varepsilon(p)$
  $= \bigcup_{p \in \{1,4\}} F\varepsilon(p)$
  $= \{F\varepsilon(1) \cup F\varepsilon(4)\}$.

Assim podemos substituir em $F\varepsilon(0)$:

$$F\varepsilon(0) = \{0\} \cup \{1, 4\} \cup \{F\varepsilon(1) \cup F\varepsilon(4)\}$$

Ainda temos que resolver $F\varepsilon(1)$ e $F\varepsilon(4)$ para encontrar o valor de $F\varepsilon(0)$:

1. $F\varepsilon(1) = \{1\} \cup \delta(1, \varepsilon) \cup \bigcup_{p \in \delta(1,\varepsilon)} F\varepsilon(p)$
   Onde:
   (a) $\delta(1, \varepsilon) = \{2\}$
   (b) $\bigcup_{p \in \delta(1,\varepsilon)} F\varepsilon(p) = \bigcup_{p \in \{2\}} F\varepsilon(p) = \{F\varepsilon(2)\}$
2. $F\varepsilon(1) = \{1\} \cup \{2\} \cup \{F\varepsilon(2)\}$
   (a) $F\varepsilon(2) = \{2\} \cup \delta(2, \varepsilon) \cup \bigcup_{p \in \delta(2,\varepsilon)} F\varepsilon(p)$
      i. $\delta(2, \varepsilon) = \{\}$, pois não há movimento vazio partindo do estado 2.
   (b) $F\varepsilon(2) = \{2\} \cup \{\} \cup \{\}$
   (c) $F\varepsilon(2) = \{2\}$
3. $F\varepsilon(1) = \{1\} \cup \{2\} \cup \{2\}$
4. $F\varepsilon(1) = \{1, 2\}$

Fazendo o mesmo para $F\varepsilon(4)$:

1. $F\varepsilon(4) = \{4\} \cup \delta(4, \varepsilon) \cup \bigcup_{p \in \delta(4,\varepsilon)} F\varepsilon(p)$

   Onde:

   (a) $\delta(4, \varepsilon) = \{\}$

   (b) $\bigcup_{p \in \delta(4,\varepsilon)} F\varepsilon(p) = \bigcup_{p \in \{\}} F\varepsilon(p) = \{\}$

2. $F\varepsilon(4) = \{4\} \cup \{\} \cup \{\}$

3. $F\varepsilon(4) = \{4\}$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
F\varepsilon(0) &= \{0\} \cup \{1, 4\} \cup \{F\varepsilon(1) \cup F\varepsilon(4)\} \\
F\varepsilon(0) &= \{0\} \cup \{1, 4\} \cup \{\{1, 2\} \cup \{4\}\} \\
F\varepsilon(0) &= \{0, 1, 2, 4\}
\end{aligned}
$$

2 Função de Programa Estendida para o AFNε

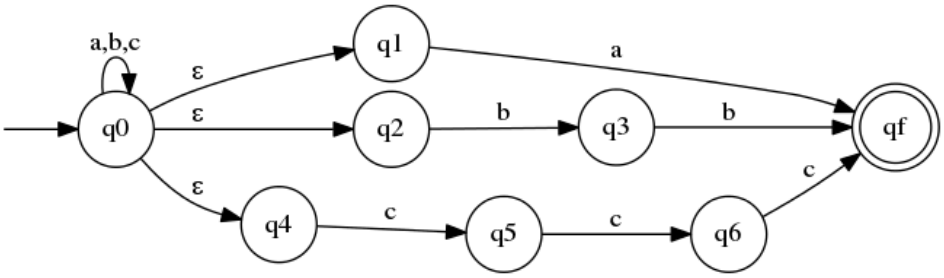


Figura 2: AFNε exemplo

Definição da Função Programa Estendida

A função programa estendida é denotada por:

$$\underline{\delta} : 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$$

$$\underline{\delta}(P, \varepsilon) = FECHO\text{–}\varepsilon(P) \quad (1)$$

$$\underline{\delta}(P, wa) = FECHO\text{–}\varepsilon(R) \quad (2)$$

$$onde \quad R = \{r | r \in \delta(s, a) \quad e \quad s \in \underline{\delta}(P, w)\} \quad (3)$$

Verificar se o autômato aceita a palavra abb. Ou seja: $q_f \in \delta(\{q_0\}, abb)$?

1. Como abb não é uma palavra vazia, utilizamos a definição (2)(3) mostrada acima:

$$\delta(\{q_0\}, abb) = F\varepsilon(\{r | r \in \delta(s, b)\ e\ s \in \delta(\{q_0\}, ab)\})$$

2. Veja que precisamos resolver $\delta(\{q_0\}, ab)$:

   (a) $\delta(\{q_0\}, ab) = F\varepsilon(\{r | r \in \delta(s, b)\ e\ s \in \delta(\{q_0\}, a)\})$

   (b) Veja que precisamos resolver $\delta(\{q_0\}, a)$:

      i. $\delta(\{q_0\}, a) = F\varepsilon(\{r | r \in \delta(s, a)\ e\ s \in \delta(\{q_0\}, \varepsilon)\})$

      ii. Veja que precisamos resolver $\delta(\{q_0\}, \varepsilon)$:

      A.
      $$\delta(\{q_0\}, \varepsilon) = F\varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0, q_1, q_2, q_4\}$$

      iii. Substituindo em $\delta(\{q_0\}, a)$

      $$\delta(\{q_0\}, a) = F\varepsilon(\{r | r \in \delta(s, a)\ e\ s \in \{q_0, q_1, q_2, q_4\}\})$$

      iv. Sabendo que $s \in \{q_0, q_1, q_2, q_4\}$, Aplicamos $r \in \delta(s, a)$. Ou seja, para cada elemento que s pode assumir, aplicamos a função de transição com o símbolo a:
      $\delta(\{q_0\}, a) = F\varepsilon(\{q_0, q_1, q_2, q_4, q_f\})$
      Para cada elemento do conjunto, calculamos o $F\varepsilon$

      $$\delta(\{q_0\}, a) = \{q_0, q_1, q_2, q_4, q_f\}$$

(c) $\delta(\{q_0\}, ab) = F\varepsilon(\{r | r \in \delta(s, b)\ e\ s \in \{q_0, q_1, q_2, q_4, q_f\}\})$

(d) $\delta(\{q_0\}, ab) = F\varepsilon(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

3. $\delta(\{q_0\}, abb) = F\varepsilon(\{r | r \in \delta(s, b)\ e\ s \in \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}\})$

4. $\delta(\{q_0\}, abb) = F\varepsilon(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_f\}) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_f\}$

Veja que $q_f \in \delta(\{q_0\}, abb)$, então a palavra abb é aceita.

3 Conversão de AFNε para AFN

A conversão de um AFNε M em AFN M' consiste em:

1. Encontrar os estados finais do AFN M';
2. Encontrar a função de transição do AFN M' a partir da função de transição do AFNε M.

Procedimento

Seja $M = \{\Sigma, Q, \delta, q0, F\}$ um AFNε qualquer. Seja $M' = \{\Sigma, Q, \delta', q0, F'\}$ um AFN construído a partir de M como segue:

F' : Conjunto de todos os estados q pertencentes a Q tal que algum elemento do $FECHO$–$\varepsilon(q)$ pertence a F;

δ' : tal que $\delta' : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ onde $\delta'(q, a) = \underline{\delta}(\{q\}, a)$

Então, para encontrar $\delta'(q, a)$ do AFN, devemos resolver a função de programa estendida $\underline{\delta}(\{q\}, a)$ do AFNε.

Por exemplo, considere o AFNε a seguir:

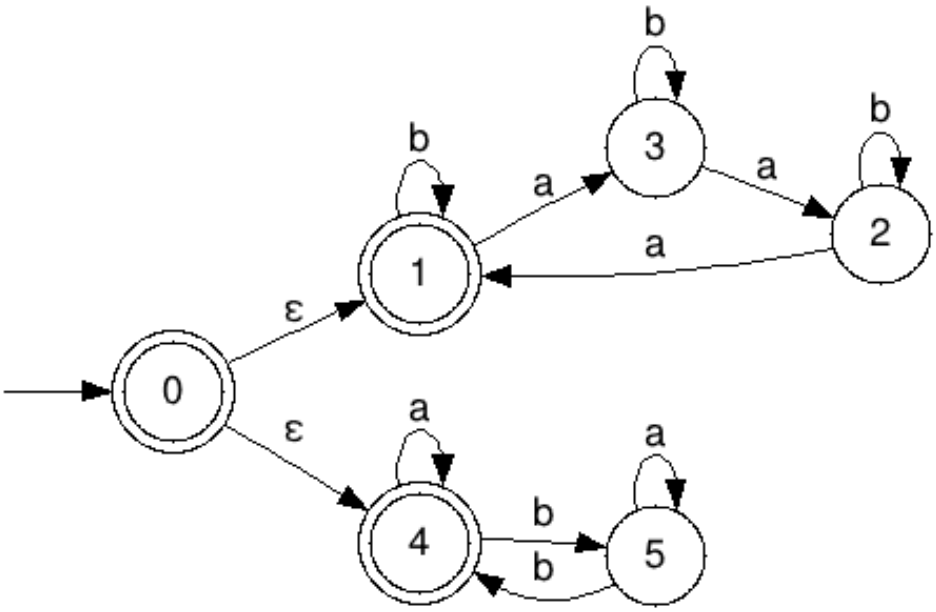


Figura 3: AFNε que reconhece palavras nas quais a quantidade de a's é múltiplo de 3 ou a quantidade de b's é par.

Determinar F', que é o conjunto de estados finais do AFN a ser encontrado:

1. $F\varepsilon(0) = \{0, 1, 4\}$, 0,1 e 4 são estados finais.
2. $F\varepsilon(1) = \{1\}$, 1 é estado final.
3. $F\varepsilon(2) = \{2\}$
4. $F\varepsilon(3) = \{3\}$

5. $F\varepsilon(4) = \{4\}$, 4 é estado final.

6. $F\varepsilon(5) = \{5\}$

Como $F\varepsilon(0)$, $F\varepsilon(1)$, $F\varepsilon(4)$ possuem estados finais no resultado, então os estados finais do AFN é $F' = \{0, 1, 4\}$. Nesse caso, os estados finais do AFNε também são os estados finais do AFN.

Agora, determinamos δ', que é a função de transição do AFN a ser encontrado.

$$
\begin{aligned}
\delta'(0,a) &= \delta(\{0\},a) = F\varepsilon(r|r \in \delta(s,a)\, e\, s \in \delta(\{0\},\varepsilon)) \\
&= F\varepsilon(r|r \in \delta(s,a)\, e\, s \in \{0,1,4\}) \\
&= \{3,4\} \\
\delta'(0,b) &= \delta(\{0\},b) = F\varepsilon(r|r \in \delta(s,b)\, e\, s \in \delta(\{0\},\varepsilon)) \\
&= F\varepsilon(r|r \in \delta(s,b)\, e\, s \in \{0,1,4\}) \\
&= \{1,5\} \\
\delta'(1,a) &= \delta(\{1\},a) = F\varepsilon(r|r \in \delta(s,a)\, e\, s \in \delta(\{1\},\varepsilon)) \\
&= F\varepsilon(r|r \in \delta(s,a)\, e\, s \in \{1\}) \\
&= \{3\} \\
\delta'(1,b) &= \delta(\{1\},b) = F\varepsilon(r|r \in \delta(s,b)\, e\, s \in \delta(\{1\},\varepsilon)) \\
&= F\varepsilon(r|r \in \delta(s,b)\, e\, s \in \{1\}) \\
&= \{1\} \\
&[...]
\end{aligned}
$$

Em Palavras!

Explicando em palavras, para encontrar $\delta'(0,a)$, por exemplo, fazemos $\delta(\{0\},a)$. Seria o mesmo que perguntar: Olhando no AFNε, se partirmos do estado 0 com o símbolo a, chegaremos em quais estados?
Estando no estado 0, o movimento vazio nos coloca em 0, 1 e 4. Processando o símbolo a, em 0 é indefinido, em 1 movimenta-se para 3 e em 4 movimenta-se para sí mesmo. Logo o resultado é 3 e 4, assim: $\delta'(0,a) = \delta(\{0\},a) = \{3,4\}$

Logo, o AFN resultante é mostrado na Figura 4.

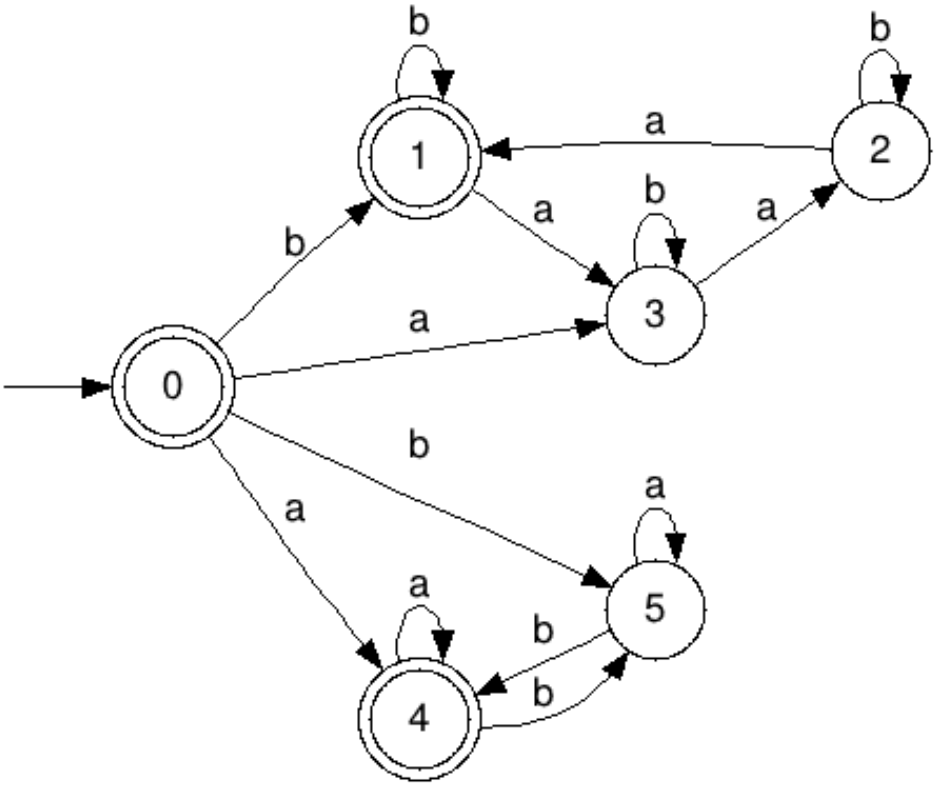


Figura 4: AFN que reconhece palavras nas quais a quantidade de a's é múltiplo de 3 ou a quantidade de b's é par.

4 Conversão de AFN para AFD

A conversão de AFN para AFD consiste em:

Procedimento

Seja $M = \{\Sigma, Q, \delta, q0, F\}$ um AFN qualquer. Seja $M' = \{\Sigma, Q', \delta, \langle q0\rangle, F'\}$ um AFD construído a partir de M como segue:

Q' : Conjunto de combinações de estados de Q, denotado por $\langle q1q2...qn\rangle$;

δ' : tal que $\delta(\langle q_1...q_n\rangle, a) = \langle p_1...p_m\rangle$ se, e somente se, $\delta(\{q_1, ..., q_n\}, a) = \{p_1, ..., p_m\}$;

$\langle q_0\rangle$: Estado inicial;

F' : Conjunto de todos os estados $\langle q_1q_2...q_n\rangle$ pertencentes a Q' tal que alguma componente q_i pertence a F;

Explicando:

Criar Q' : Inicialmente criamos o conjunto de estados do AFD. Os estados do AFD nada mais são do que combinações dos estados do AFN. Por exemplo, se o AFN possui os estados $Q = \{q0, q1\}$, então o AFD terá os estados $Q' = \{\langle q0\rangle, \langle q1\rangle, \langle q0q1\rangle\}$, os quais são combinações de Q.

Criar δ' : Criar a função de transição δ' do AFD com base na função de transição do AFN δ. Então, para cada estado de Q', que criamos no passo anterior, devemos fazer $\delta(\langle q_1...q_n\rangle, a) = \langle p_1...p_m\rangle$.

Por exemplo, se o AFN possui a transição $\delta(\{q0\}, a) = \{q1, q2\}$, então no AFD teremos $\delta'(\langle q0\rangle, a) = \langle q1q2\rangle$.

Estado Inicial : O estado inicial do AFD é mesmo estado inicia do AFN.

Criar F' : Criar o conjunto de estados finais do AFD. Para isso, observamos cada estado do AFD cujo nome possui um estado do AFN que seja final.

Por exemplo, se o estado $q1$ do AFN é final, então o estado $\langle q0q1q2\rangle$ do AFD também será final, assim como todos os demais cujo o nome possui $q1$.

Exemplo

Vamos converter o AFN da Figura 4 (Pág 8) em um AFD.

O primeiro passo seria criar todas as combinações de estados possíveis com os estados do AFN, porém isso seria muito trabalhoso para fazermos manualmente. Além disso, muitos desses estados criados podem ser inalcançáveis.

Então, descrevemos a função de transição em forma de tabela:

δ AFN	a	b
$\rightarrow *\{0\}$	$\{3, 4\}$	$\{1, 5\}$
$*\{1\}$	$\{3\}$	$\{1\}$
$\{2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
$\{3\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
$*\{4\}$	$\{4\}$	$\{5\}$
$\{5\}$	$\{5\}$	$\{4\}$

De acordo com a definição, transformaremos em AFD assim:

δ' AFD	a	b
$\rightarrow *\langle 0\rangle$	$\langle 34\rangle$	$\langle 15\rangle$
$*\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$*\langle 4\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 5\rangle$
$\langle 5\rangle$	$\langle 5\rangle$	$\langle 4\rangle$

Veja que, no estado inicial, o AFN movimentou-se para os estados 3 e 4 com o símbolo a, então, no AFD haverá o movimento para o estado $\langle 34\rangle$ com o símbolo a, como visto na definição. O mesmo foi feito para o símbolo b.

Assim, sabemos que os estados $\langle 34\rangle$ e $\langle 15\rangle$ do AFD são alcançáveis a partir do estado inicial, então devemos fazer a função de transição sobre eles também, assim:

δ' AFD	a	b
$\rightarrow *\langle 0\rangle$	$\langle 34\rangle$	$\langle 15\rangle$
$*\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$*\langle 4\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 5\rangle$
$\langle 5\rangle$	$\langle 5\rangle$	$\langle 4\rangle$
$\langle 34\rangle$	$\langle 24\rangle$	$\langle 35\rangle$
$\langle 15\rangle$	$\langle 35\rangle$	$\langle 14\rangle$

Observe que para encontrar $\delta'(\langle 34\rangle, a)$, por exemplo, basta concatenar os valores da coluna a das linhas $\langle 3\rangle$ com $\langle 4\rangle$.

Surgiram os estados $\langle 24\rangle$, $\langle 35\rangle$ e $\langle 14\rangle$ que são alcançáveis, então:

δ' AFD	a	b
$\rightarrow *\langle 0\rangle$	$\langle 34\rangle$	$\langle 15\rangle$
$*\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$*\langle 4\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 5\rangle$
$\langle 5\rangle$	$\langle 5\rangle$	$\langle 4\rangle$
$\langle 34\rangle$	$\langle 24\rangle$	$\langle 35\rangle$
$\langle 15\rangle$	$\langle 35\rangle$	$\langle 14\rangle$
$\langle 24\rangle$	$\langle 14\rangle$	$\langle 25\rangle$
$\langle 35\rangle$	$\langle 25\rangle$	$\langle 34\rangle$
$\langle 14\rangle$	$\langle 34\rangle$	$\langle 15\rangle$

Agora surgiu o estado $\langle 25\rangle$:

δ' AFD	a	b
$\rightarrow *\langle 0\rangle$	$\langle 34\rangle$	$\langle 15\rangle$
$*\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$*\langle 4\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 5\rangle$
$\langle 5\rangle$	$\langle 5\rangle$	$\langle 4\rangle$
$\langle 34\rangle$	$\langle 24\rangle$	$\langle 35\rangle$
$\langle 15\rangle$	$\langle 35\rangle$	$\langle 14\rangle$
$\langle 24\rangle$	$\langle 14\rangle$	$\langle 25\rangle$
$\langle 35\rangle$	$\langle 25\rangle$	$\langle 34\rangle$
$\langle 14\rangle$	$\langle 34\rangle$	$\langle 15\rangle$
$\langle 25\rangle$	$\langle 15\rangle$	$\langle 24\rangle$

Como não surgiram mais estados novos, podemos finalizar completando os estados finais:

δ' AFD	a	b
$\rightarrow *\langle 0\rangle$	$\langle 34\rangle$	$\langle 15\rangle$
$*\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$*\langle 4\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 5\rangle$
$\langle 5\rangle$	$\langle 5\rangle$	$\langle 4\rangle$
$*\langle 34\rangle$	$\langle 24\rangle$	$\langle 35\rangle$
$*\langle 15\rangle$	$\langle 35\rangle$	$\langle 14\rangle$
$*\langle 24\rangle$	$\langle 14\rangle$	$\langle 25\rangle$
$\langle 35\rangle$	$\langle 25\rangle$	$\langle 34\rangle$
$*\langle 14\rangle$	$\langle 34\rangle$	$\langle 15\rangle$
$\langle 25\rangle$	$\langle 15\rangle$	$\langle 24\rangle$

Nota-se que, partindo do estado inicial 0, não é possível alcançar os estados 1, 2, 3, 4 e 5. Logo, esses estados não precisam ser colocados na representação gráfica do AFD. A Figura 5 mostra o AFD obtido.

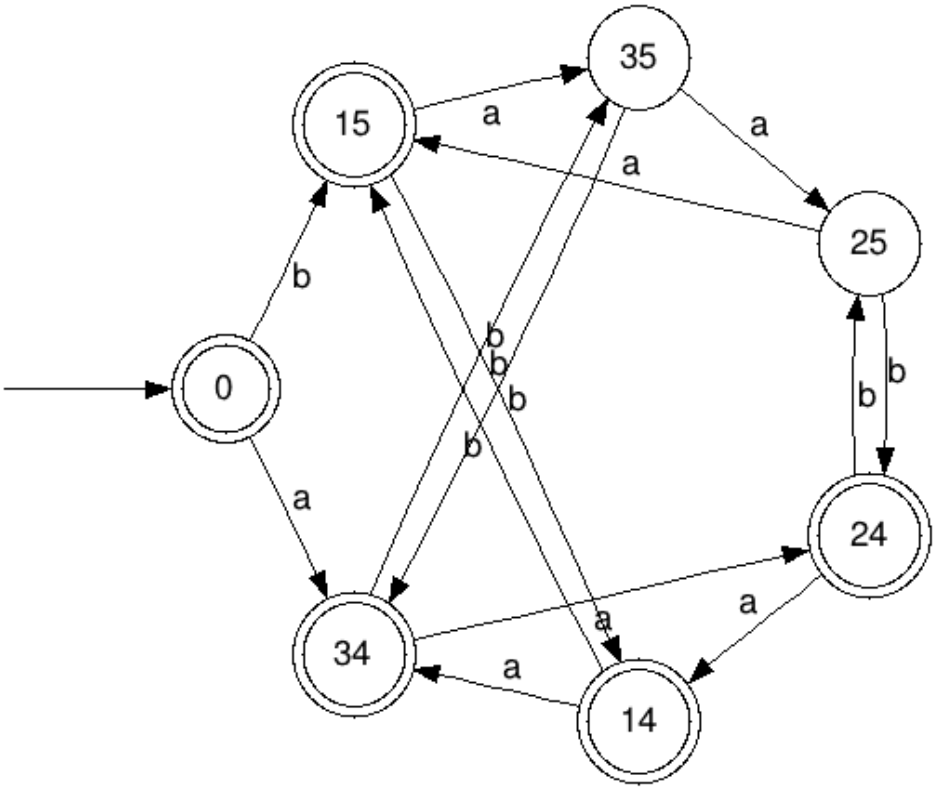


Figura 5: AFD que reconhece palavras nas quais a quantidade de a's é múltiplo de 3 ou a quantidade de b's é par.